STUDENTEXAMENSNÄMNDEN 24.9.2014

MATEMATIKPROV
LÅNG LÄROKURS

Högst tio uppgifter får lösas. Uppgifter som markerats med en stjärna (∗) ger maximalt 9 poäng, övriga uppgifter maximalt 6 poäng.

1. **a)** Lös ekvationen $(x-2)(x-3)=6$.

b) I vilken punkt skär parablerna $y=x^2+x+1$ och $y=x^2+2x+3$ varandra?

c) Bestäm alla tal som uppfyller följande villkor: Medelvärdet av ett tal och dess inverterade tal är 4.

2. **a)** Bestäm skärningspunkten mellan linjerna $2x+3y=7$ och $3x-2y=4$.

b) Ett tal är lika stort som hälften av dess kvadratrot. Bestäm alla sådana tal.

c) Förenkla uttrycket $\ln\left(\frac{1}{3x^2}\right)+\ln 3+2\ln x$ då $x>0$.

3. **a)** Peter börjar mäta febern vid tidpunkten $t=0$. Hans mätares utslag $f(t)$ vid tidpunkten t minuter får vi med formeln $f(t)=38-2e^{-0{,}6t}$ celsiusgrader. Hur länge ska mätningen pågå för att resultatet ska avvika med högst en tiondels grad från värdet $38{,}0$ celsiusgrader? Ange svaret med en minuts noggrannhet.

b) Bestäm temperaturens förändringshastighet $f'(3)$. Ange svaret med en decimals noggrannhet.

4. Vi förflyttar varje punkt på parabeln $y=x^2$ med vektorn $\overline{v}$. Bestäm ekvationen för den kurva som uppstår i formen $y=f(x)$, när

a) $\overline{v}=2\overline{j}$

b) $\overline{v}=3\overline{i}$

c) $\overline{v}=3\overline{i}+2\overline{j}$

5. Kurvan $y=\sin x$, $-\pi\le x\le\pi$, roterar kring x-axeln. Bestäm det exakta värdet av volymen av den timglasliknande rotationskropp som uppstår.

6. Vi undersöker parabelbågen $y=3x-5x^2$ då $0\le x\le\frac{1}{2}$. Vilken punkt på denna båge är längst från origo? Motivera ditt svar också på annat sätt än med räknaren, till exempel med hjälp av derivatan.

7. En förpackningsautomat fyller kaffepaket. Mängden kaffe är normalfördelad med standardavvikelsen 10 gram, men väntevärdet kan regleras. Vilket väntevärde borde man ställa in när målet är att tillverka paket av vilka högst $2{,}0$ % innehåller mindre än 500 gram kaffe? Ange svaret med ett grams noggrannhet.

8. Vi granskar talföljderna (a_n) och (b_n), vilkas alla termer a_n och b_n, $n=1,2,\dots$ är positiva.

a) Vi antar att följden (a_n) är geometrisk. Visa att $a_n = \sqrt{a_{n-1}\,a_{n+1}}$ för varje $n=2,3,\dots$

b) Vi antar att $b_n = \sqrt{b_{n-1}\,b_{n+1}}$ för varje $n=2,3,\dots$ Visa att följden (b_n) är geometrisk.

9. Bilden nedan föreställer Gateway Arch i Saint Louis i USA. Vid fotograferingstidpunkten var monumentet under byggnad. Det planerades av arkitekt Eero Saarinen och byggdes åren $1963–1965$. Bågens form beskrivs av ekvationen

$$y=-39f\left(\tfrac{x}{39}\right)+231.$$

Här är $f(t)=\dfrac{1}{2}\left(e^t+e^{-t}\right)$ och x-axeln går längs markytan genom tjockändorna medan y-axeln är bågens symmetriaxel. Längdenheten är meter.

a) Bestäm bågens höjd med en meters noggrannhet.

b) Bestäm bågens bredd med en meters noggrannhet.

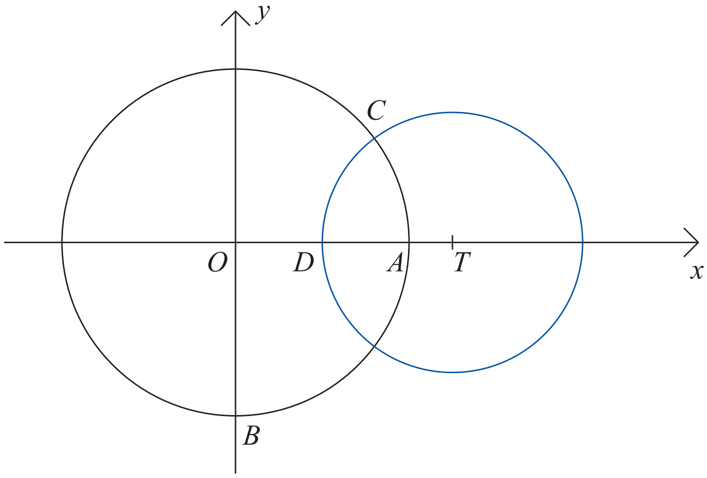
c) I hur stor spetsig vinkel möter bågen markytan? Ange svaret med en grads noggrannhet.

<http://rememberingletters.wordpress.com/2012/01/12/gateway-arch/>. Hämtad 12.2.2013.

10. Anta att $A=(1,0)$, $B=(0,-1)$ och att $t>1$. Med punkten $T=(t,0)$ som medelpunkt ritas en cirkel som skär både enhetscirkeln $x^2+y^2=1$ vinkelrätt i punkten C och sträckan OA i punkten D. Se figur.

a) Bestäm koordinaterna för punkten C uttryckt med hjälp av parametern t.

b) Visa att punkterna B, D och C ligger på samma linje.



11. **a)** Visa att funktionen $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$ är strängt växande när $x\in$ **R**.

b) Bestäm gränsvärdet för funktionen $f(x)$ när x växer över alla gränser.

c) Gäller olikheten $f(x)\geq 0{,}999$ för varje $x\geq 10$?

12. Låt **R** vara mängden av reella tal och **N** $=\{0,1,2,\ldots\}$ mängden av naturliga tal. Är följande påstående sant eller falskt? Motivera ditt svar.

a) $\forall x\in \mathbf{R}\ \exists y\in \mathbf{R}\ :\ x\leq y$

b) $\exists y\in \mathbf{R}\ \forall x\in \mathbf{R}\ :\ x\leq y$

c) $\exists x\in \mathbf{N}\ \forall y\in \mathbf{N}\ :\ x\leq y$

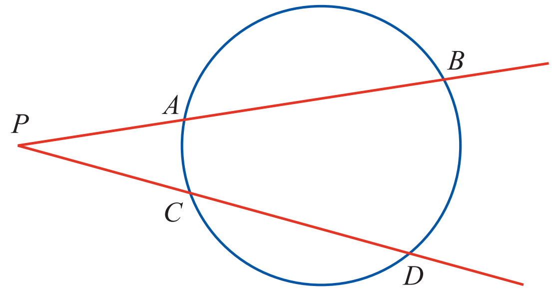
13. Vi undersöker ekvationen $x^5-x=1$.

a) Visa att ekvationen har exakt en lösning i intervallet $1\leq x\leq 2$.

b) Bestäm genom att använda Newtons metod och startvärdet $x_0=1$ närmevärdet x_4 till lösningen i deluppgift a. Ange svaret med tre decimalers noggrannhet.

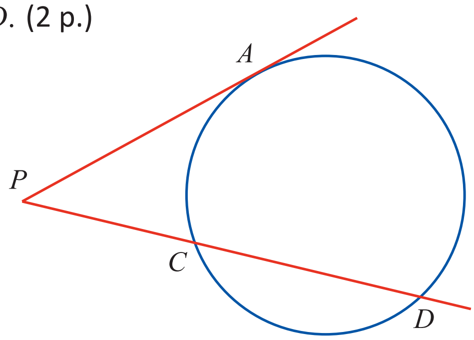
***14.** Vi granskar en cirkel och en punkt P utanför cirkeln.

a) Från punkten P ritar vi två linjer som skär cirkeln i fyra olika punkter A, B, C och D enligt figuren. Visa att trianglarna PCB och PAD är likformiga. (2 p.)

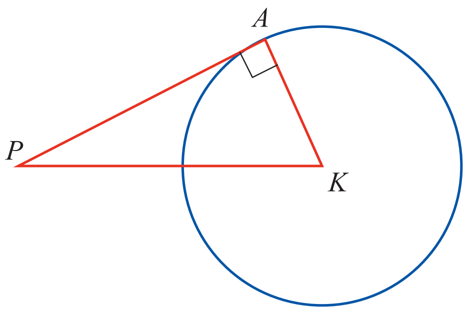


b) Visa att $PA \cdot PB = PC \cdot PD.$ (2 p.)

c) I specialfallet $A = B$ tangerar en av linjerna cirkeln. Visa att det i detta fall gäller att $(PA)^2 = PC \cdot PD.$ (2 p.)



d) Bevisa med hjälp av de föregående fallen Pythagoras sats genom att undersöka den triangel i figuren nedan som har hörnet K i cirkelns medelpunkt och hörnet A på cirkelns periferi. (3 p.)



***15. a)** Visa att $xy \leq \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$ för alla reella tal x och y. (2 p.)

b) Anta att $a_1, \ldots, a_n$ och $b_1, \ldots, b_n$ är reella tal. Vi antar att $A = \sqrt{a_1{}^2 + \cdots + a_n{}^2} > 0$, $B = \sqrt{b_1{}^2 + \cdots + b_n{}^2} > 0$ och betecknar vidare $x_k = \frac{a_k}{A}$ och $y_k = \frac{b_k}{B}$ när $k = 1, \ldots, n.$ Visa med hjälp av deluppgift a att $x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \leq 1.$ (4 p.)

c) Härled med hjälp av deluppgift b *Cauchys olikhet*

$$a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \leq \sqrt{a_1{}^2 + \cdots + a_n{}^2}\sqrt{b_1{}^2 + \cdots + b_n{}^2}.$$ (3 p.)